## ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24/5/18

**3.20**

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x>1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$n=72$

Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η πιθαν. περισσ. από 50 από τις τιμές του τ.δ. $\le 3$

**ΛΥΣΗ:**

$E=\{$μια από τις τιμές $\le 3\}$

$Y=$ αριθμός τιμών του τ.δ. που είναι $\le 3$

$=$ αριθμός $E$ στις $n=72$ δοκιμές με $p=P(E)$

$$Y\sim B(n=72,\ p=P(E)=\tfrac{2}{3}) \overset{\text{Προσ.}}{\approx} N(np=72\cdot 2/3=48,\ np(1-p)=16)\equiv N(48,16)$$

$$p=P(E)=\int_E f(x)dx=\int_1^3\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^3=\frac{2}{3}$$

για ακριβές: $P(Y>50)=P(Y\ge 51)=\sum_{y=51}^{72}\binom{n}{y}\left(\frac{2}{3}\right)^y\left(\frac{1}{3}\right)^{n-y}$

$$P(Y\ge 51)\underset{\text{Προσ.}}{\overset{\text{διόρθ.}}{\approx}} P(Y\ge 50.5 \mid Y\overset{\text{Προσ.}}{\approx}N(48,16))=P\left((Z=)\frac{Y-48}{4}\ge\frac{50.5-48}{4}\ /Z\sim N(0,1)\right)$$

$$=P(Z\ge 0{,}625)=0.5-P(0\le Z\le 0{,}625)=0.5-0.23405=0{,}26595$$

**4.4**

Πληθ. 4, 5, 6

$n=2$, επανάθεση, $\bar{x}$

δ.ε. για μ: $L=\bar{x}-\frac{6\bar{x}^2}{2}$, $U=\bar{x}+\frac{6\bar{x}^2}{2}$ } β.ε. ;

**ΛΥΣΗ:**

$$L=\bar{x}-\frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{1}}=\bar{x}-\frac{1}{6}$$

$$U=\bar{x}+\frac{1}{6}$$

$f(x)=\frac{1}{3}$

$\mu=E(X)=\frac{1}{3}(4+5+6)=5$

$\longrightarrow$

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{3} \rightsquigarrow \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{2}{6}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{3}(4^2+5^2+6^2) = \frac{77}{3}$$

(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)

(4,4): $4 \pm \frac{1}{6}$   $4{,}5 \pm \frac{1}{6}$   $5 \pm \frac{1}{6}$   $4.5 \pm \frac{1}{6}$   $5 \pm \frac{1}{6}$   $5.5 \pm \frac{1}{6}$   $5 \pm \frac{1}{6}$   $5.5 \pm \frac{1}{6}$   $6 \pm \frac{1}{6}$

2/3 Εδώ το μ

β.ε. $\frac{3}{9} \cdot 100\%$ για το Δ.Ε.

$\boxed{4.16}$

$n_1 = 100$ , $\sigma_1 = 0{,}10$ , $\bar{x}_1 = 1{,}07$

$n_2 = 100$ , $\sigma_2 = 0{,}12$ , $\bar{x}_2 = 1{,}18$

(i) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ V $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ , $a = 0{,}05$

∃ διαφορά μεταξύ δύο μηχανών με επίπεδο σημαντικότητας $a = 0{,}05$;

$$Z = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = -7{,}042$$

$$|Z| \geq Z_{0{,}025} = 1{,}96 \text{ , απορ. } H_0$$

(ii) $\beta = P(\text{δεχ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθής}) = P\left(-1{,}96 \leq \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq 1{,}96 \mid \mu_1 - \mu_2 = \delta\right) =$

Επειδή αληθεύει η $H_a$

$\gamma = 1 - \beta$

$$= P\left(-1{,}96 - \frac{\delta}{\sqrt{\frac{0{,}1^2}{100^2} + \frac{0{,}12^2}{100^2}}} \leq \underbrace{\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}_{N(0,1)} \leq 1{,}96 - \frac{\delta}{\sqrt{\ }}\right) =$$

$\mu_1 - \mu_2$

$$= \Phi\left(1{,}96 - \frac{\delta}{\sqrt{\ }}\right) - \Phi\left(-1{,}96 - \frac{\delta}{\sqrt{\ }}\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

**24** (Σελ 316)

$n_1 = 9$ , $M_1$ 10, 12, 11, 16, 10, 11, 13, 10, 15

$n_2 = 9$ , $M_2$ 11, 10, 7, 8, 9, 12, 8, 7, 9

ανεξ. $N(\mu_1, \sigma^2)$

$N(\mu_2, \sigma^2)$

(i) Οι μηχανες λειτουργουν ομοιομορφα; $(a = 0{,}05)$

$H_0\ \mu_1 = \mu_2$ , $H_a\ \mu_1 \neq \mu_2$

(ii) $\mu_1 - \mu_2 = 2$ , $\beta = ;$

$\gamma = 1 - \beta$

ΛΥΣΗ:

(i) $t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $(\sim t_{n_1+n_2-2})$

Κρίσιμη περιοχή: $|t| \geq t_{\overset{0{,}025}{a/2},\ \underbrace{n_1+n_2-2}_{16}} = 2{,}920$

$\bar{x}_1 = 12$ , $\bar{x}_2 = 9$

$S_1^2 = 5$ , $S_2^2 = 3$ , $S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \dfrac{64}{16} = 4$

$\rightsquigarrow t = \dfrac{12-9}{2\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}} = 3{,}18$ . απορ. $H_0$

(ii) $\beta = P(\delta\epsilon x.\ H_0 / H_0$ αληθής $) = P\left(-2{,}120 \leq \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \leq 2{,}120 \,/\, \mu_1 - \mu_2 = 2\right)$

$= P\left(-2{,}120 - \dfrac{2}{2\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}} \leq \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \leq 2{,}120 - \dfrac{2}{2\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}}\right) =$

$= P(-4{,}24 \leq t_{16} \leq 0) = \delta$